Gaußsche Osterformel

Die Gaußsche Osterformel von Johann Carl Friedrich Gauß erlaubt die Berechnung des Osterdatum für ein gegebenes Jahr X. Die Bezeichnung Formel ist irreführend, denn es handelt sich nicht um eine einzige Formel, sondern um einen Satz von Gleichungen, in dem der komplette Algorithmus der Osterrechnung 'Computus Paschalis' formuliert ist.[1]

Dieser Gleichungssatz gilt allgemein für den Gregorianischen Kalender, liefert nach Ersatz zweier variabler Zwischengrößen M und S durch konstante Werte M=15 und S=0 auch das Osterdatum im Julianischen Kalender.

Im Gregorianischen Kalender kann in seltenen Fällen der 26. April als spätester Ostersonntag bestimmt werden. Die bei der Kalenderreform aufgestellte Zusatzbestimmung, dass der letzte mögliche Ostersonntag wie bisher der 25. April ist, muss zusätzlich beachtet werden.

Seit den Beschlüssen des ersten Konzils von Nicäa 325 n. Chr. und auf Grund der im Jahr 525 n. Chr. im Auftrag von Papst Johannes I. begonnenen Arbeiten durch Exiguus wird das Osterfest am ersten Sonntag nach dem Frühlingsvollmond, dem Ostersonntag, gefeiert.

Tag des Frühlingsanfangs ist nach Beschluss der 21. März. Ein am 21. März stattfindender Vollmond gilt bereits als frühestmöglicher Frühlings-Vollmond. Der 22. März ist deshalb der früheste Kalendertag, auf den Ostern fallen kann. Im Julianischen Kalender fällt der letzte mögliche Ostersonntag auf den 25. April. Diese Begrenzung wurde im Gregorianischen Kalender in einer Zusatzbestimmung beibehalten. Somit gibt es in beiden Kalendern insgesamt 35 verschiedene Ostertermine. Ostern hat den Charakter eines beweglichen Feiertages. Das Osterfest spielt eine zentrale Rolle im Kirchenjahr, da von ihm fast alle beweglichen christlichen Feiertage wie Aschermittwoch, Christi Himmelfahrt oder Pfingsten abhängen.

Der Algorithmus zur Osterrechnung ist immer gleich, wurde aber erst von Gauß kurz und elegant mittels moderner Mathematik formuliert. Vorher wurde diese Arbeit „von Hand“ durchgeführt. Die dafür von Papst und christlicher Kirche beauftragten Gelehrten hießen Komputisten, ihre Arbeit nannte man Komputistik oder Komputus. Im späten Mittelalter war der Komputus der wesentliche Gegenstand der Mathematik.

Seine Osterformel veröffentlichte Carl Friedrich Gauß erstmals im Jahre 1800.[2] In der Einleitung schrieb er: „Die Absicht dieses Aufsatzes ist […] von dieser Aufgabe eine […] bloß auf den einfachsten Rechnungs-Operationen beruhende rein analytische Auflösung zu geben.“ Er ging damals davon aus, dass die Mondgleichung regelmäßig alle 300 Jahre anzuwenden sei.

```
Julianischer Kalender                       ¦ Gregorianischer Kalender
a = Jahr mod 19                             ¦
b = Jahr mod 4                              ¦
c = Jahr mod 7                              ¦
k = Jahr div 100                            ¦
p = k div 3                                 ¦
q = k div 4                                 ¦
d = (19a + M) mod 30              M = 15 ¦ M = (15 + k - p - q) mod 30
e = (2b + 4c + 6d + N) mod 7      N =  6 ¦ N = (4 + k - q) mod 7
Ostern = (22 + d + e)ter März  (Der 32. März ist der 1. April usf.)
```

Es gibt einen handschriftlichen Nachtrag unbekannten Datums (nach 1807), worin Gauß den gültigen komplizierteren Beschluss der Reformer über die Anwendung der Mondgleichung berücksichtigte.[3] Die Korrektur wurde 1816 veröffentlicht und betrifft ausschließlich die Variable p.[4]

```
Julianischer Kalender                       ¦ Gregorianischer Kalender
a = Jahr mod 19                             ¦
b = Jahr mod 4                              ¦
c = Jahr mod 7                              ¦
```

```
     k = Jahr div 100                                 ¦
     p = (8k + 13) div 25                             ¦
     q = k div 4                                      ¦
     d = (19a + M) mod 30                    M = 15 ¦ M = (15 + k - p - q) mod 30
     e = (2b + 4c + 6d + N) mod 7            N =  6 ¦ N = (4 + k - q) mod 7
     Ostern = (22 + d + e)ter März  (Der 32. März ist der 1. April usf.)
```

Die Gaußsche Osterformel gilt für beliebige Kalenderjahre nach dem Julianischen und dem Gregorianischen Kalender, solange die kirchlichen Regeln für die Festlegung des Osterdatums nicht geändert werden, auch wenn in manchen Darstellungen durch begrenzte Tabellen der Eindruck erweckt wird oder entstehen kann, die Gültigkeit sei auf bestimmte Jahre beschränkt.

Obwohl die Gaußsche Osterformel den Oster-Algorithmus elegant kurz darstellt, wird die mit zwei Ausnahmeregeln formulierbare Festlegung des spätesten Oster-Sonntags auf den 25. April von der Formel selbst nicht erfasst. Eine entsprechende Ergänzung wurde im 19. Jahrhundert von Hermann Kinkelin[5] und Christian Zeller[6] angegeben. Zeller schrieb: Übrigens lässt sich diese Ausnahme auch in die Formel selbst einführen […]. Die kompakte Zusammenfassung der gesamten Kalkulation gewann erst im Zeitalter des PC an Interesse, als die dadurch wieder etwas aufwendigere Berechnung, die man nun nicht mehr selbst ausführen musste, eine kleinere Rolle spielte als die übersichtlichere Eingabe in Form eines Programms.

Eine solche Zusammenfassung wurde 1997 von Heiner Lichtenberg vorgestellt, der die Formel außerdem begrifflich gliederte.[7][8] Mit einer später vorgeschlagenen Vereinfachung wurde so die Formel von Kinkelin und Zeller aus dem Jahre 1900 wiederentdeckt. Sie wird im Folgenden dargestellt.

Zur Bestimmung des Osterdatums für das Jahr X berechne man der Reihe nach folgende Größen:

```
 1. die Säkularzahl:                                K(X)       = X div 100
 2. die säkulare Mondschaltung:                     M(K)       = 15 + (3K + 3)
div 4 - (8K + 13) div 25
 3. die säkulare Sonnenschaltung:                   S(K)       = 2 - (3K + 3)
div 4
 4. den Mondparameter:                              A(X)       = X mod 19
 5. den Keim für den ersten Vollmond im Frühling:   D(A,M)     = (19A + M) mod
30
 6. die kalendarische Korrekturgröße:               R(D,A)     = D div 29 + (D
div 28 - D div 29) (A div 11) [9]
 7. die Ostergrenze:                                OG(D,R)    = 21 + D - R
 8. den ersten Sonntag im März:                     SZ(X,S)    = 7 - (X + X div
4 + S) mod 7
 9. die Entfernung des Ostersonntags von der
    Ostergrenze (Osterentfernung in Tagen):         OE(OG,SZ) = 7 - (OG - SZ)
mod 7
10. das Datum des Ostersonntags als Märzdatum
    (32. März = 1. April usw.):                            OS = OG + OE
```

Der vorstehende Algorithmus gilt für den Gregorianischen Kalender. Für den Julianischen Kalender setzt man M = 15 und S = 0 (wie schon in der Einleitung erwähnt wurde).

Gegenüberstellung: Originalformel – Ergänzte Formel

Gegenübergestellt sind die beiden Gleichungssätze (Gauß und Lichtenberg, siehe oben) für den Gregorianischen Kalender. Die Variable X ist das Kalenderjahr.

```
                                                    Gauß ¦  Lichtenberg
--------------------------------------------------------------------------------
-----------------------------------
                                                              ¦
Gaußsche Zykluszahl        a = X mod 19                      ¦ A(X) = X mod 19
4.
                           b = X mod 4                        ¦
                           c = X mod 7                        ¦
                           k = X div 100                      ¦ K(X) = X div 100
1.
```

```
                              p = (8k + 13) div 25          ¦
                              q = k div 4                   ¦
Korr.: So- u. Mo-Gleichung M = (15 + k - p - q) mod 30      ¦
                                                            ¦ M(K) = 15 + (3K + 3)
div 4 - (8K + 13) div 25
2.
Korr.: Sonnengleichung        N = (4 + k - q) mod 7         ¦
Mondentfernung                d = (19a + M) mod 30          ¦ D(A,M) = (19A + M) mod
30
5.
                                                            ¦ S(K) = 2 - (3K + 3)
div 4
3.
                                                            ¦ R(D,A) = D div 29 + (D
div 28 - D div 29)(A div 11)
6.
                                                            ¦ OG(D,R) = 21 + D - R
7.
                                                            ¦ SZ(X,S) = 7 - (X + X
div 4 + S) mod 7
8.
Osterentfernung               e = (2b + 4c + 6d + N) mod 7 ¦ OE(OG,SZ) = 7 - (OG -
SZ) mod 7                           9.
Ostersonntag                    = (22 + d + e) ter März     ¦ OS = (OG + OE) ter
März
10.
                        Der 32. März ist der 1. April usf.  ¦ OS = 32 ist der 1.
April usf.

Ausnahmen:

Rechenergebnisse in den Ausnahmejahren 1954 und 1981
     Ausnahme I                     ¦                                   Ausnahme II
                  ¦
    im Jahre 1981        Gauß  ¦  Lichtenberg                           im Jahre 1954
   Gauß  ¦  Lichtenberg
--------------------------------------------------------------------------------
-----------------------------------
                             a =  5   ¦  A =  5
 a = 16  ¦  A = 16
                             b =  1   ¦
 b =  2  ¦
                             c =  0   ¦
 c =  1  ¦
                             k = 19   ¦  K = 19
 k = 19  ¦  K = 19
                             p =  6   ¦
 p =  6  ¦
                             q =  4   ¦
 q =  4  ¦
                             M = 24   ¦
 M = 24  ¦
                                      ¦  M = 24
         ¦  M = 24
                             N =  5   ¦
 N =  5  ¦
                             d = 29   ¦  D = 29
 d = 28  ¦  D = 28
                                      ¦  S =-13
         ¦  S =-13
                                      ¦  R =  1
         ¦  R =  1
                                      ¦ OG = 49
         ¦ OG = 48
                                      ¦ SZ =  1
         ¦ SZ =  7
                             e =  6   ¦ OE =  1
 e =  6  ¦ OE =  1
```

Ostern = 57. März = 26. April ¦ OS = 50. März = 19. April ¦ Ostern = 56. März = 25. April ¦ OS = 49. März = 18. April

Die Vorverschiebung um je eine Woche gemäß Ausnahmeregelung ist mit der Gaußschen Osterformel nicht, wohl aber mit einer ergänzten Osterformel (zum Beispiel mit der von Lichtenberg) errechenbar.

Äußerungen von Gauß zu den Ausnahmen:

Gauß hat sich viermal schriftlich über seine Methode der Osterbestimmung geäußert, dreimal davon über die Handhabung der Ausnahmen:
 1800: Gibt die Rechnung Ostern auf den 26 April, so wird dafür allemahl der 19 April genommen. […] Gibt die Rechnung d=28, e=6, und kommt noch die Bedingung hinzu, dass 11M+11 mit 30 dividirt einen Rest gibt, der kleiner als 19 ist, so fällt Ostern […] auf den 18 April.[10]
 1807: […] nur dann wenn der erste Rest [Anm.: das Jahr mod 19] nicht unter 11 war, […][11] Die zweite Ausnahme ist anders formuliert als 1800, die Auswirkung ist gegenüber der älteren Formulierung aber unverändert.
 1811: Wenn im gregor. Calender die Rechnung Ostern am 26st. April giebt, setzt man allemal den 19t. und wenn sie den 25st. bringt, den 18t.[12] Jetzt ist die zweite Ausnahme unzulässig verkürzt dargestellt. In der Gesamtausgabe ist eine Bemerkung von Alfred Loewy zu diesem Fehler.[13]
 1816: Gauß gab die wesentliche Korrektur wegen der ursprünglich falsch angenommenen Mondgleichung bekannt, äußerte sich aber nicht mehr zu den Ausnahmen.[4]

Einzelnachweise:
 1.? Gauß selbst sprach von einfachsten Rechnungs-Operationen, siehe Gauß: Berechnung des Osterfestes, 1800, S. 121–122 [1]
 2.? Gauß: Berechnung des Osterfestes, 1800 [2]
 3.? Nikolaus A. Bär: Die Osterformel von C. F. Gauss, Absatz Der Nachtrag zur Osterformel von C. F. Gauss [3]
 4.? a b Gauß: Berichtigung zu dem Aufsatze: Berechnung des Osterfestes, 1816 [4], auch in Gauß: Werke. Band 11.1, 1927 [5]
 5.? Kinkelin: Die Berechnung des christlichen Osterfestes, 1870 [6]
 6.? Zeller: Kalender-Formeln, 1887 [7]
 7.? Lichtenberg: Zur Interpretation der Gaußschen Osterformel und ihrer Ausnahmeregeln, 1997
 8.? Sie wird zum Beispiel von der Physikalisch-Technischen Bundesanstalt angewendet [8]
 9.? Die nach Denis Roegel kürzer geschriebene Größe R(D,A) = (D + A div 11) div 29 bewirkt dasselbe. [9] Suchwort Roegel
 10.? Gauß: Berechnung des Osterfestes, 1800, S. 129 [10]
 11.? Gauß: Noch Etwas über die Bestimmung des Osterfestes, 1807, Sp. 594 [11], auch in Gauß: Werke. Band 6, 1874, S. 85 [12]
 12.? Gauß: Eine leichte Methode, den Ostersonntag zu finden, 1811, S. 274 [13], auch in Gauß: Werke. Band 11.1, 1927, S. 199 [14]
 13.? Gauß: Werke. Band 11.1, 1927, S. 200 [15]

Literatur:
 Carl Friedrich Gauß: Berechnung des Osterfestes, Monatliche Correspondenz zur Beförderung der Erd- und Himmels-Kunde 2, August 1800, S. 121–130 (auf der Gauß-CD: [16], im Internet-Archiv: [17]; auch in Gauß: Werke. Band 6, 1874, S. 73–79, beim GDZ: [18], im Internet-Archiv: [19])
 Carl Friedrich Gauß: Berechnung des jüdischen Osterfestes, Monatliche Correspondenz zur Beförderung der Erd- und Himmels-Kunde 5, Mai 1802, S. 435–437 (auch in Gauß: Werke. Band 6, 1874, S. 80–81, beim GDZ: [20], im Internet-Archiv: [21])
 Carl Friedrich Gauß: Noch Etwas über die Bestimmung des Osterfestes, Braunschweigisches Magazin 20, 12. September 1807, Sp. 589–596 (Digitale Bibliothek Braunschweig: [22] 1 2 3 4; auch in Gauß: Werke. Band 6, 1874, S. 82–86, beim GDZ: [23], im Internet-Archiv: [24])
 Carl Friedrich Gauß: Eine leichte Methode, den Ostersonntag zu finden in J. E. Bode (Hrsg.): Astronomisches Jahrbuch für das Jahr 1814, Berlin 1811, S. 273–274 (bei Google Books: [25]; auch in Gauß: Werke. Band 11.1, 1927, S. 199–200, beim GDZ: [26])
 Carl Friedrich Gauß: Berichtigung zu dem Aufsatze: Berechnung des Osterfestes. Mon. Corr. 1800 Aug. S. 121, Zeitschrift für Astronomie und verwandte

Wissenschaften 1, Januar und Februar 1816, S. 158 (bei Google Books: [27]; auch in Gauß: Werke. Band 11.1, 1927, S. 201, beim GDZ: [28], Bemerkungen von Alfred Loewy auf S. 202 [29] und S. 205 [30] und lateinische Beschreibung der Gaußschen Osterformel von Paul Tittel auf S. 203–204 [31])
Ferdinand Piper: Zur Kirchenrechnung, Formeln und Tafeln, Journal für die reine und angewandte Mathematik 22, 1841, S. 97–147 (beim GDZ: [32], bei Google Books: [33], [34])
Hermann Kinkelin: Die Berechnung des christlichen Osterfestes, Zeitschrift für Mathematik und Physik 15, 1870, S. 217–228 (im Internet-Archiv: [35])
Christian Zeller: Kalender-Formeln, Acta Mathematica 9, 1887, S. 131–136 (im Internet-Archiv: [36])
Heiner Lichtenberg: Zur Interpretation der Gaußschen Osterformel und ihrer Ausnahmeregeln, Historia Mathematica 24, 1997, S. 441–444